ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Έστω $N = \alpha_\nu 10^\nu + \alpha_{\nu-1} 10^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} 10^{\nu-2} + ... + \alpha_1 10 + \alpha_0$ η δεκαδική παράσταση ενός θετικού ακέραιου N και $S = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} + ... + \alpha_1 + \alpha_0$ το άθροισμα των ψηφίων του. Να αποδειχτούν τα κριτήρια διαιρετότητας:**

(i) $25|N$, αν και μόνο αν $25|\alpha_1 10 + \alpha_0$.
(ii) $9|N$, αν και μόνο αν $9|S$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Προφανώς, $25|\alpha_\nu 10^\nu + \alpha_{\nu-1} 10^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} 10^{\nu-2} + ... + \alpha_2 10^2$. Επομένως,

$$\alpha_\nu 10^\nu + \alpha_{\nu-1} 10^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} 10^{\nu-2} + ... + \alpha_2 10^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 25)$$
$$\alpha_\nu 10^\nu + \alpha_{\nu-1} 10^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} 10^{\nu-2} + ... + \alpha_2 10^2 + \alpha_1 10 + \alpha_0 \equiv \alpha_1 10 + \alpha_0 (\mathrm{mod}\, 25) .$$

Δηλαδή, ένας ακέραιος διαιρείται με 25, αν και μόνο αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με 25.

(ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$10 \equiv 1 \pmod 9$$

$$10^{\kappa} \equiv 1^{\kappa} \pmod 9, \text{ για } \kappa = 0,1,2,3,4,\ldots,\nu$$

$$10^{\kappa} \equiv 1 \pmod 9$$

$$\alpha_{\kappa} 10^{\kappa} \equiv \alpha_{\kappa} \pmod 9.$$

Επομένως, $\alpha_0 \equiv \alpha_0 \pmod 9$, $\alpha_1 10 \equiv \alpha_1 \pmod 9, \ldots, \alpha_\nu 10^{\nu} \equiv \alpha_\nu \pmod 9$. Προσθέτουμε τις ισοτιμίες κατά μέλη και έχουμε:

$$\alpha_\nu 10^{\nu} + \alpha_{\nu-1} 10^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} 10^{\nu-2} + \ldots + \alpha_1 10 + \alpha_0 \equiv \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} + \ldots + \alpha_1 + \alpha_0 \pmod 9,$$

δηλαδή

$$N \equiv S \pmod 9.$$

2. Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $3^{1999} + 2^{1999}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε διαδοχικά:

$$3 + 2 \equiv 0 \pmod 5$$

$$3 \equiv -2 \pmod 5$$

$$3^{1999} \equiv (-2)^{1999} \pmod 5$$

$$3^{1999} \equiv -2^{1999} \pmod 5.$$

Επομένως, $3^{1999} - (-2)^{1999} \equiv 0 \pmod 5$, δηλαδή $3^{1999} + 2^{1999} \equiv 0 \pmod 5$.

Άρα $5 | 3^{1999} + 2^{1999}$, που σημαίνει ότι ο αριθμός $3^{1999} + 2^{1999}$ λήγει σε 0 ή σε 5. Όμως, ο αριθμός $3^{1999} + 2^{1999}$ είναι περιττός ως άθροισμα ενός περιττού και ενός άρτιου και άρα λήγει σε 5.